# Adendo 1: Definições indutivas e demonstrações por indução[[1]](#footnote-1)

A gente navega na vida servido por faróis estrábicos (Guimarães Rosa)

## Esquema

I) Conceitos e procedimentos

1. Um exemplo de demonstração informal indutiva

2. Justificativa

3. Definições indutivas e demonstrações por indução: exemplos e caracterizações

4. Definição indutiva e definição por indução

5. Indução e calculabilidade

II) Formalização

## Introdução

Na caracterização dos sistemas formais introduzidos na Lógica Quantificacional são considerados três domínios básicos de entidades: o dos símbolos (distribuídos em diferentes categorias lexicais, formando os vocabulários das linguagens), o das expressões (isto é, de sequências de símbolos) e o das sequências (eventualmente, árvores) de expressões[[2]](#footnote-2). De maneira mais precisa, no tocante a cada um dos dois últimos domínios, isola-se uma parte deles: dentre as expressões, aquelas que são expressões bem formadas (com seus dois subdomínios: o dos termos e o das fórmulas) e dentre as seqüências de expressões, mais precisamente, dentre as sequências (eventualmente árvores) de fórmulas, as demonstrações e as deduções. Manifestamente, cada um desses três domínios é constituído por uma infinidade de elementos distintos, o que torna impossível listar seus elementos, ou seja, indicar pelo nome cada um de seus elementos[[3]](#footnote-3). Mas no caso do vocabulário, embora não seja possível listar exaustivamente seus elementos, é fácil determinar para cada uma das categorias lexicais, que propriedades satisfeitas exatamente pelos elementos da correspondente categoria; por exemplo, no caso das variáveis individuais de uma linguagem formal (a razão fundamental para introduzir infinitude no domínio dos símbolos), podemos fornecer uma propriedade simples, satisfeita exatamente pelas entidades que queremos que sejam nossas variáveis individuais (por exemplo, ser a letra x, afetada de um subscrito numérico[[4]](#footnote-4)). Mas o mesmo não pode ser dito com respeito aos termos, às formulas ou ainda às demonstrações e deduções de uma teoria de primeira ordem, no tocante a tais domínios, não parece possível determinar propriedades simples que permitissem fornecer uma definição direta e explícita de cada um deles, salvo em casos particulares[[5]](#footnote-5). O que facilmente podemos dizer dessas entidades (termos, fórmulas e demonstrações ) é que são construídas a partir de certos elementos, previamente determinados, por meio da aplicação reiterada de determinados procedimentos, previamente especificados explicitamente. E essa caracterização pode ser tomada como uma maneira especial de definir, nem listando os elementos, nem dando uma propriedade comum a todos eles, mas sim, apresentando os objetos tidos por simples do domínio (as constantes e variáveis, no caso dos termos; as fórmulas atômicas, no caso das fórmulas; e os axiomas – alternativamente, suposições, no caso das demonstrações) e oferecendo procedimentos para gerar novos elementos do respectivo domínio a partir de elementos previamente gerados (a adjunção de um símbolo funcional de grau n a uma seqüência constituída por n termos previamente formados, no caso dos termos; as operações sintáticas de conjunção, disjunção, condicionar e quantificar universal ou existencialmente, no caso das fórmulas; e as regras de inferência, no caso das demonstrações). Essas definições ilustram um método de definição muito valioso para o desenvolvimento de teorias matemáticas, conhecido pela alcunha de definições indutivas (ou, às vezes chamadas de definições recursivas).

Por outro lado, se quisermos demonstrar que todos os elementos de um dos três domínios, mencionados, têm uma determinada propriedade, não podemos demonstrar inspecionando cada um dos elementos e mostrando que cada um deles tem a referida propriedade. E às vezes não é possível oferecer um argumento explícito geral (nem direto, nem por redução ao absurdo) para isso, ou seja, não somos capazes de mostrar que um objeto qualquer tem a propriedade e daí inferir que qualquer um tem a propriedade. Por exemplo, podemos facilmente oferecer um argumento geral explicito para o fato de que toda fórmula é formada por ocorrências de símbolos da linguagem (pois uma fórmula qualquer é uma expressão e toda expressão é, por definição, uma seqüência de símbolos da linguagem). Mas certamente o leitor encontrará grandes dificuldades (eventualmente insuperáveis) para formular um argumento direto que demonstre a propriedade elementar segundo a qual todas as fórmulas contêm um número par (eventualmente zero) de ocorrências de parênteses. A melhor maneira de demonstrar isso seria mostrar que as fórmulas atômicas contêm um número par (eventualmente zero) de ocorrências de parênteses e que os procedimentos de construção de fórmulas, se introduzirem parênteses, introduzem-nos aos pares. Essa estratégia de demonstração ilustra um procedimento de demonstração muito útil em Matemática, conhecido pelo nome de “Demonstração por Indução”. A denominação não é das mais felizes, uma vez que pode dar azo à confusão desse método demonstrativo com o procedimento, presuntivamente empregado nas ciências empíricas para corroborar afirmações, chamado de indução. O uso do adjetivo recursivo também não é inteiramente adequado, uma vez que esse adjetivo comumente empregado na matemática para um sucedâneo do adjetivo calculável (mais preciso e manejável) e, como veremos oportunamente, nem todo domínio definido indutivamente é calculável. Assim, vamos ficar com a denominação que já se tornou tradicional[[6]](#footnote-6).

Há uma íntima conexão entre o método de definir e o método de demonstrar. Vejamos melhor essa conexão, inicialmente generalizando as noções de definição indutiva e demonstração por indução.

## Definição indutiva generalizada[[7]](#footnote-7)

Um domínio de entidades pode ser bem determinado por cláusulas que se dividem nos seguintes grupos:

Cláusulas diretas. São de dois tipos.

1. Cláusulas básicas: estabelecem os objetos iniciais:
2. Cláusulas indutivas: estabelecem os procedimentos (as operações) que permitem formar ou determinar “novos” objetos; i.e., fornecem as operações (regras) de geração de objetos “mais complexos”, a partir de objetos “mais simples”.

Cláusula externa: é aquela que estabelece que os únicos objetos do domínio são os que podem ser determinados como tais a partir dos objetos iniciais por meio das cláusulas indutivas (i.e. pelo emprego reiterado das operações de geração).[[8]](#footnote-8)

Vale dizer, um domínio de objetos resta bem caracterizado ao estabelecermos: (i) quais são os objetos iniciais (por meio das cláusulas básicas) e (ii) quais são os procedimentos (as operações) que por interação e reiteração dão lugar a todos os demais objetos (o que é determinado pelas cláusulas indutivas e pela cláusula externa)[[9]](#footnote-9).

É fácil perceber que esse método, quando corretamente empregado, permite de fato determinar o domínio, não incorrendo em nenhuma circularidade (ou, como dizem os que lidam com computação, em looping). Pois embora pressuponha a possibilidade de reiterar e interar indefinidamente operações, a cada passo as reiterações e interações são delimitadas, de sorte que, por assim dizer, se pode sempre “voltar atrás”, retraçar qualquer elemento aos elementos iniciais, delimitando os passos (as interações e reiterações das regras de geração) necessários para determinar o elemento como membro do domínio, a partir da pertença dos elementos iniciais ao domínio. Evidentemente, a aceitação como correta de uma aplicação concreta desse método dependerá da aceitação como corretas das cláusulas básicas e das clausulas indutivas que forem empregadas. O que importa salientar é que o método como tal não introduz nenhuma dificuldade maior no tocante a legitimidade de se proceder da maneira preconizada por ele.

### Um exemplo clássico de definição indutiva

O exemplo clássico de definição indutiva é a definição, atribuída ao lógico e matemático italiano Giuseppe Peano, de número natural. Nesta definição, comparecem como noções primitivas as de zero (que é o único objeto inicial) e de sucessor (a única operação de geração), noções que devem ser compreendidas de tal maneira que zero não seja sucessor de nada e exista um e apenas um sucessor de cada coisa; Temos, então, a seguinte definição[[10]](#footnote-10):

(Cláusula básica) Zero é um número natural;

(Cláusula Indutiva) Se n for um número natural, então o sucessor de n é um numero natural;

(Cláusula Externa) Os únicos números naturais são aqueles determinados pelas duas cláusulas acima.

## Demonstrações por indução

### Esquema geral da demonstração por indução

O interessante a observar sobre os domínios caracterizados indutivamente, é que dão lugar a procedimentos de demonstração muito úteis e, algumas vezes, imprescindíveis. A fim de demonstrarmos que todos os objetos de certo domínio, caracterizado indutivamente, têm certa propriedade, é suficiente mostrar que os objetos iniciais do domínio têm a propriedade e que as regras de geração preservam a propriedade em questão, ou seja, que a propriedade é hereditária: se os antecedentes de uma regra qualquer têm a propriedade, aqueles gerados a partir deles também têm.

A ideia intuitiva que serve de guia para organizar tais demonstrações é, então, a de demonstrar que os objetos originais têm a propriedade em pauta, e que se objetos mais simples têm a propriedade, então os objetos mais complexos também têm. Disso decorre que todos os objetos do domínio têm a propriedade em pauta. Evidentemente, a noção de simplicidade e complexidade aqui é aquela induzida pelos procedimentos de geração (os que podem ser gerados “antes” são mais simples que os que exigem mais passos).

Desse modo, de maneira geral, essas demonstrações assumem a forma seguinte

1. Base: os objetos originais (determinados na definição do domínio) têm a propriedade em pauta
2. Passo da Indução: as regras de geração preservam a propriedade em pauta; ou seja, se todos os elementos empregados em um procedimento qualquer de geração (daqueles determinados na definição indutiva do domínio) têm a propriedade em pauta, então o objeto gerado a partir deles empregando esse procedimento também tem a propriedade em pauta.

Conclusão: todos os objetos têm a propriedade em pauta.

No que se segue vamos denominar esse esquema de esquema generalizado de demonstração por indução. Vejamos, então, como fica esse esquema abstrato quando consideramos domínios particulares.

### Demonstração por indução finita

Na teoria dos números, o procedimento de demonstração por indução pode assumir diferentes formulações, equivalentes entre si. Uma delas, conhecida pela denominação de princípio ou regra da indução finita[[11]](#footnote-11) é representada pelo esquema:

1. Base: 0 tem a propriedade P
2. Passo da Indução: Se n tem a propriedade P, então o sucessor de n tem também

Conclusão: Todos os números naturais têm a propriedade P

Ou, de maneira mais formal, o seguinte princípio de inferência

P(0) ∀x(P(x) →P(x´))

⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯

∀x P(x)

### Demonstração por indução em entidades morfológicas

Como observamos antes, nas considerações sobre a morfologia de uma linguagem de primeira ordem, consideramos principalmente três domínios, o dos termos, o das formulas e o das derivações (deduções e demonstrações). Vejamos, então, como fica o esquema de demonstração por indução para cada um desses domínios, levando em conta a maneira como são definidos.

#### Demonstração por indução em termos

1. Base da Indução: as variáveis individuais têm a propriedade P;
2. Passo Indutivo: Para qualquer símbolo funcional fn de L quaisquer termos t1,...,tn de L, se t1,...,tn possuem a propriedade P, então fn t1,...,tn têm a propriedade P;

Conclusão: Todos os termos de L têm P

#### Demonstração por indução em fórmulas.

Nesse caso, as demonstrações por indução assumem, a seguinte forma (Supondo que a asserção a ser demonstrada seja: todas as fórmulas de uma dada linguagem L têm a propriedade P):

1. Base da Indução: as fórmulas atômicas de L têm a propriedade P;
2. Passo Indutivo: Para quaisquer fórmulas A e B de L, se elas têm a propriedade P, então as fórmulas formadas a partir delas por conjunção, negação condicionalização, quantificação universal ou existencial também têm a propriedade P;

Conclusão: Todas as fórmulas de L têm P

Normalmente, as demonstrações da base e do passo indutivo se desdobram ainda em demonstrações por casos, conforme as diferentes maneiras de se compor uma fórmula a partir de símbolos ou de fórmulas mais simples, de sorte que, de maneira ainda mais detalhada, o esquema da demonstração é o seguinte:

Base da Indução:

1. A constante proposicional tem a propriedade P;
2. As fórmulas da forma Pt1, ..., tn, têm a propriedade P;

Passo Indutivo:

Hipótese da indução: Sejam B e C fórmulas quaisquer que têm P

Caso 1: [...] Então ¬B. tem P.

Caso 2: [...] Então B ∧ C). tem P.

Caso 3: [...] Então (B ∨ C). tem P.

Caso 4: [...] Então (B → C). tem P.

Caso 5: [...] Então ∀x A tem P.

Caso 5: [...] Então ∃x A tem P.

Esquema no qual os colchetes com reticências dentro indicam o raciocínio que, assumindo a hipótese da indução leva à conclusão referida após os colchetes.

Esse esquema de demonstração, derivado diretamente da definição indutiva de fórmula e plenamente justificado por ela, como veremos posteriormente, é inteiramente análogo ao princípio de indução finita. Em particular, o esquema permite assumir, pela hipótese da indução, que a propriedade em questão vale para as subfórmulas imediatas da fórmula que se deve mostrar que tem a propriedade. Facilmente percebemos ser exatamente o análogo ao procedimento fundado no princípio da indução finita, em que assumimos que um número tem certa propriedade e mostramos que seu sucessor tem a propriedade.

#### Demonstrações por indução em derivações

O esquema básico para demonstrar propriedades de derivações por indução é o seguinte:

1. Base da Indução: as derivações simples (formadas por um único axioma ou uma única suposição) têm a propriedade P;
2. Passo Indutivo: Para qualquer regra de inferência, se as derivações cujas conclusões são premissas da regra de derivação têm a propriedade P, então derivação formada a partir dessas derivações, conjugando-as e adicionando o passo inferencial dado pela regra também têm a propriedade P;

Conclusão: Todas as derivações têm P

Assim, se considerarmos o sistema de dedução natural apresentado antes, o passo indutivo se desdobra numa demonstração por casos, contemplando todas as possíveis regras de inferência, demonstração na qual se assume a hipótese de indução. Ou seja, supondo que Σ, Σ1, Σ2 sejam derivações que satisfazem a propriedade em pauta, cabe mostrar que, em todos os casos abaixo as derivações mencionadas tem a propriedade em pauta:

Caso 1.

(Γ) (Γ)

Σ Σ

A, ∧ B\_ A, ∧ B\_

A B

Caso 2.

(Γ1) (Γ2)

Σ1 Σ2

A B\_

A ∧ B

Caso 3

(Γ) (Γ)

Σ Σ

A B \_

A ∨ B A ∨ B

Caso 4

(Γ1)[A] (Γ2)[B]

Γ Σ1 Σ2

A v B C C

C

Caso 5.

(Γ)[A]

Σ

B

A →B

Caso 6

(Γ1) (Γ2)

Σ1 Σ2

A A → B

B

Caso 7

(Γ1)[A] (Γ2) [A]

Σ1 Σ2

B ¬B

¬ A

Caso 8

(Γ)

Σ

¬ ¬ A

A

Caso 9

(Γ)

Σ

∀xA

A (x/a)

Caso 10

(Γ)

Σ

A(x/a)

xA

(onde o parâmetro a não ocorre nem em A, nem em sentenças de Γ)

Caso 11

(Γ)

Σ

Ax/a

**x**A

Caso 12

(Γ) (Γ1)[ Ax**/**a]

Σ Σ1

xA C

C

## Definições por indução.

Se for possível oferecer uma definição indutiva de um domínio de objetos, então não apenas podemos demonstrar propriedades de seus objetos, lançando mão das cláusulas que serviram para defini-lo, como podemos também caracterizar novas propriedades e definir operações (em particular, funções) lançando mão dos mesmos recursos, desde que a definição original satisfaça uma condição adicional. A condição necessária é que os procedimentos de geração sejam unívocos (ou seja, cada elemento do domínio só pode ser determinado como elemento do domínio de uma única maneira através dos procedimentos de geração). Destarte, a propriedade (ou a operação) pode ser definida inicialmente com respeito aos objetos iniciais e, em seguida, define-se para os demais objetos segundo os procedimentos de geração, supondo já definida para os elementos mais simples.

Seguindo e generalizando a prática em (KLEENE, 1950) vamos denominar tais definições de definições por indução e reservar o termo definição indutiva para aquelas em que o que é definido é um domínio de objetos.

### Exemplos numéricos

Produto:

n. 0 = 0

n. (m+1) = (n.m) + n

Fatorial (n! = 1. 2 .... (n-1) . n)

1! = 1

(n+1)! = (n!) (n+1)

Somatória de n termos ( = a1, +... + an)

= a1

= ()+an+1

Exponenciação (an = a....a)

a0 = 1 a1 = a an+1 = a (an)

É importante destacar, como aprendemos com Dedekind em Was sind und was sollen die Zahlen sein[[12]](#footnote-12), que as condições de legitimidade das definições por indução são mais restritas que as correspondentes para a demonstração por indução, no que toca à definição indutiva do domínio. As demonstrações por indução reclamam apenas que todos os objetos possam ser gerados (ainda que não univocamente), a partir dos objetos iniciais, pela aplicação reiterada (uma ou mais vezes) e composta das operações de geração. Ao passo que as definições por indução reclamam que, para cada objeto, haja um único procedimento (um único caminho) de geração dele, i.e., que um mesmo objeto não possa ser determinado de duas ou mais maneiras diferentes (seja por partirem de objetos iniciais distintos, seja por empregarem outras regras, seja ainda por empregarem as mesmas regras em ordem diferente).

### Exemplos não numéricos

A definição de satisfação em uma estrutura. A definição de valoração booleana.

### Falsos exemplos

Exemplos de funções mal definidas. Se na definição de fórmulas, eliminarmos os parênteses, sem os substituirmos por algum outro recurso, a definição antes oferecida de valoração booleana seria incorreta.

Seja T uma teoria formal de primeira ordem, definimos mal uma função do conjunto dos teoremas em números naturais se oferecermos as seguintes cláusulas: i) o valor da função para os axiomas é zero iii) o valor da função para os teoremas é um mais a soma dos valores das premissas.

## Exercícios

1. Mostre, usando indução, as proposições abaixo:

A) Morfológicas:

1. O número de ocorrências de parêntese numa fórmula é par

2. O conjunto das subfórmulas de uma fórmula é sempre finito.

B) Aritméticas: (Para os que têm familiaridade com a Teoria dos Números – basta a familiaridade que se deveria adquirir na escola)

1. =

2. (1 + r + r2 + ... + rn) = (*r*n+1*−*1)/r-1, se r >1

3. a n + m = an + am

4. (an)m = an.m

5. 4n+2 + 52n+1 é divisível por 21, para qualquer n

6. Mostre que, para n ≥ 1, cada um dos números abaixo é divisível por 6:

a) 3n +3n2

b) n (n+1)(n+2)

c) n(n2+5)

Para resolver esse exercício, é necessário ter em mente alguns fatos aritméticos elementares, entre os quais os assim chamados produtos notáveis e que se um número divide os dois membros de uma soma

7. Nesse exercício, considere a serie (infinita) dita de Fibonaci a0, a1 ....,an, .... definida por indução da seguinte maneira:

a0=0, a1=1 e para i ≥ 2, ai = ai-2 + ai-1

Mostre que < an+2 para qualquer n ≥ 1

Converta a demonstração seguinte, de que existem infinitos números primos, numa demonstração na qual o princípio de indução seja empregado de maneira explícita.

Vamos mostrar que para cada número natural, existe um número primo maior que ele. Seja n um número natural qualquer. Consideremos, agora, o número n! + 1. Se esse número for primo, então o problema está resolvido. Caso contrário, existe um número m1 distinto de 1 que é divisor de n! + 1. Tal número deve ser maior do que n, pois, do contrário, ele dividiria n! (pois, se um número divide um dos membros da soma e divide a soma como um todo, então divide também o outro membro) e, assim, dividiria 1 (isto é seria igual a 1). Assim, se ele for primo, teremos chegado ao resultado, e se não for, pelo mesmo raciocínio, existiria m2 divisor de n! + 1 maior do que n e divisor de m1. Reiterando o raciocínio, chegamos enfim a uma seqüência de números n! + 1, m1, m2,..., em que cada elemento é divisor do elemento anterior (e, portanto de todos os anteriores); ora, como os termos tornam-se cada vez menores e, portanto que devem ter um termo final e este é necessariamente um primo maior do que n. Ou seja, tal demonstração fornece um meio de encontrar, para cada número natural n, um primo maior do que n, porém menor do que n!+2. (Demonstração tomada de Gentzen, The Consistency of Elementary Number Theory, p. 144)

## a justificação dos procedimentos indutivos

### Da definição indutiva e da definição por indução

A explicitação, em textos do final do século XIX, da estratégia de caracterização indutiva de um domínio como uma definição e a caracterização (definição) por indução de propriedades e operações suscitou certo debate sobre sua legitimidade, uma vez que aparentemente feriria um princípio básico da definição: que o definiendum não ocorra no definiens (circularidade)[[13]](#footnote-13).

Ora, se por definição de um predicado (noção, conceito) entendemos a determinação das entidades que o satisfazem (ou seja, a apresentação de um critério simultaneamente necessário e suficiente para que uma entidade satisfaça o predicado em pauta), podemos denominar os procedimentos acima apresentados de definições. Mais ainda, essas serão exemplos definições em que o definiendum ocorre no definiens, porém, como vimos isso não introduz nenhuma circularidade no procedimento, uma vez que sempre é humanamente possível retraçar o conceito à sua caracterização para os elementos iniciais (evidentemente, aqui o conceito não pode ocorrer).

Aqueles que estiverem convencidos da legitimidade dos conceitos básicos da Teoria de Conjuntos, mas ainda não estão convencidos da legitimidade do procedimento aqui denominado de definição indutiva, deverão se convencer disso se atentarem para o fato de que toda definição indutiva (bem como toda definição por indução) pode ser convertida em uma definição explícita, lançando mão do instrumental fornecido pela teoria dos conjuntos. Para isso, basta definir o domínio desejado como o menor conjunto que contem os elementos iniciais e é fechado pelas operações indicadas (ou, pelas cláusulas indicadas, no caso das definições por indução).

### Da demonstração por indução

Observemos que a validade do procedimento de demonstração ora introduzido repousa simplesmente no fato do domínio ser exaustivamente caracterizado, a partir dos elementos iniciais, através dos procedimentos de geração. Ou seja, qualquer objeto pode ser visto como o resultado da aplicação reiterada dos diferentes procedimentos em alguma ordem. Dito de outro modo, o que assegura a validade da demonstração por indução, enquanto procedimento propriamente demonstrativo (logicamente válido) é, justamente, o fato de que todos os objetos são gerados a partir dos objetos iniciais pela aplicação das regras. Assim, se os objetos iniciais têm a propriedade e se as regras preservam-na, então não é possível que algum objeto do domínio careça da propriedade em pauta.

O passo da indução fornece, em verdade, um esquema que permite construir, para cada objeto do domínio, uma demonstração direta de que tal objeto possui a propriedade em pauta. Pois seja a um elemento determinado do domínio. Se ele for um elemento inicial, a demonstração de que ele tem a propriedade em pauta é dada na base. E se ele não for um elemento inicial ele, o passo indutivo fornece um procedimento para, a partir de uma demonstração de que seus geradores tem a propriedade em pauta, construir uma demonstração de que ele tem a propriedade em pauta; assim, se reiterarmos o raciocínio, agora com respeito aos geradores dele e em seguida, se for o caso, com os geradores desses geradores e assim sucessivamente construiremos a demonstração de que o elemento considerado tem a propriedade em pauta.

Isso pode ser facilmente visto no caso dos números naturais. Suponhamos, então que se demonstrou que 0 tem a propriedade em pauta e que se um número a tem, o seu sucessor também a possui. Assim, dado um número n pode se construir uma demonstração de que n tem a propriedade em pauta, sem usar o princípio de indução. Pois, pela cláusula externa da definição de número natural, n é o sucessor reiterado de 0 n vezes (i.e., n é 0´...´, onde a operação de sucessor ocorre n vezes). Construímos a demonstração de que n tem a propriedade em pauta, simplesmente, reproduzindo inicialmente a demonstração de que 0 tem a propriedade e apondo a demonstração de que se um número qualquer tem a propriedade em questão, o seu sucessor tem e aplicamos n vezes a regra de instanciação (na primeira vez instancia-se com 1, da segunda com 2 e assim sucessivamente) seguida imediatamente de um modus ponens em que a premissa maior é a instância resultante e a premissa menor é ou a afirmação de que zero tem a propriedade, ou a conclusão do emprego imediatamente anterior desse procedimento. Ou seja, temos a derivação que se segue:

P(0)

∀x (P(x) →Px´))

P(0) →P(1)

P(1)

.

.

.

P(n-1)

P(n-1) →P(n)

P(n)

Observe que isso oferece, para cada número natural n, uma prova de que n tem a propriedade em pauta, sem recurso ao princípio de indução. Porém, não oferece ainda uma prova direta de que todos os números têm a propriedade em pauta, sob as mesmas hipóteses, uma vez que não oferece um procedimento uniforme de demonstração de que n tem a propriedade (os três pontinhos terão que ser, em cada caso, substituídos por números distintos de passos). Portanto, isso não é uma demonstração do postulado de Peano da Indução.

Se for possível delimitar as variações possíveis no número e/ou nos tipos de passos inferenciais que poderiam substituir as reticências no esquema acima, facilmente obteríamos uma prova direta, sem uso de indução, de que todos os números têm a propriedade em pauta. Eventualmente, a demonstração seria uma demonstração por casos, cada caso cobrindo uma das variações possíveis.

## Definições indutivas e efetibilidade

Observemos que, se as cláusulas diretas da definição indutiva de um domínio forem decidíveis (i.e., se dispormos de um procedimento de decisão para determinar se algo é ou não um objeto inicial, bem como para determinar se a aplicação de uma regra de geração é correta), então a definição indutiva fornece uma “máquina” (um algoritmo) para gerar todos os objetos do sistema. Em condições análogas, a definição por indução fornece um procedimento de cálculo. Porém, dai não se segue que todo conjunto indutivamente definido, ainda que suas cláusulas definitórias sejam decidíveis, seja decidível, pois a definição indutiva envolve um quantificador existencial ilimitado (a existência de um procedimento de geração do objeto a partir dos objetos iniciais).

## Demonstração por indução completa

### Indução completa ou por curso de valores

Frequentemente, em contextos aritméticos, é mais fácil demonstrar uma propriedade usando uma maneira alternativa de raciocinar por indução, na qual o passo indutivo (mais precisamente, a hipótese da indução) faz referencia não apenas ao predecessor imediato de um dado número, mas a todos os menores. Nesses casos, a demonstração por indução assume a forma seguinte:

1. Zero tem propriedade P
2. Para qualquer número natural n, se todos os números menores que n tiverem a propriedade P, então n também tem a propriedade P

Conclusão: Todos os números naturais têm P

Esse princípio é conhecido como indução por curso de valores ou indução completa, e facilmente se mostra que é equivalente ao princípio de indução finita.

#### Exercício

Mostre que o p.i.f (o princípio de indução finita)., o p.i.c. (princípio de indução completa), princípio do mínimo e a afirmação de que o conjunto dos números naturais é o menor conjunto que contém o zero e é fechado pela operação de sucessor são todas equivalentes entre si. Ou seja, mostre a equivalência entre as quatro afirmações seguintes:

Princípio da indução finita (p.i.f):

Dada uma propriedade qualquer de números naturais, se Zero tem a propriedade e, para qualquer natural n, vale que se n tem a propriedade, então o sucessor de n também tem, disso decorre que todos os números naturais tem a propriedade em questão.

Princípio da indução completa (p.i.c.)

Dada uma propriedade qualquer de números naturais, se Zero tem a propriedade e se, para qualquer natural n, vale que se todos os menores que n tem a propriedade, então n também tem, disso decorre que todos os números naturais tem a propriedade em questão.

Princípio do mínimo

Todo conjunto não vazio de números naturais tem um menor elemento.

Asserção

O conjunto dos números naturais é o menor conjunto que contém o zero e tal que se contém um número contém o seu sucessor imediato.

### Esquema geral

Não apenas em contextos aritméticos nos deparamos com a situação em que, na tentativa de demonstrar por indução algo sobre um domínio definido indutivamente, pareça-nos mais fácil (ou mesmo imprescindível) mostrar, não própria e somente, que as regras de geração do domínio preservam a propriedade em pauta (no sentido explicado antes), mas sim mostrar que um elemento qualquer do domínio possui a propriedade, supondo que os elementos menos complexos possuem. Somos, assim, levados a pensar num esquema geral análogo ao da indução completa, uma sorte de princípio generalizado da indução completa. Podemos considerar o seguinte esquema inferencial (denominaremos de esquema generalizado da indução completa)

1. Base: Os elementos simples têm P
2. Passo Indutivo: Para qualquer elemento e do domínio, se todos os elementos menos complexos que e têm a propriedade P, então e também tem a propriedade P.

Conclusão: Todos os elementos do domínio têm P

Na verdade, o emprego desse procedimento inferencial não exige necessariamente que o domínio seja definido por indução, basta (e é necessário) que seja possível caracterizar uma noção de complexidade tal que não exista séries infinitas descendentes de elementos desse domínio, ou seja, não é possível determinar uma serie indefinida de objetos na qual o elemento anterior é estritamente mais complexo que o subseqüente. Pois, nesse caso teremos que qualquer coleção não vazia de elementos do domínio possui um elemento minimal (isto é, tal que ele não é mais complexo que nenhum elemento da referida coleção). Assim, oi raciocínio seguinte permite justificar o padrão inferencial representado por esse esquema. Consideremos um domínio para qual é possível definir uma noção de complexidade satisfazendo a condição enunciada antes e seja P definida para elementos desse domínio tal que os elementos simples tem P e tal que qualquer elemento e do domínio, se todos os elementos mais simples que e têm a propriedade P, então e também tem a propriedade P.. Suponhamos, então, por absurdo que algum elemento do domínio não tenha a propriedade P. Ora, como não existem seqüências infinitas descendentes, há um elemento minimal que não tem P (ou seja, tal que ele não tem a propriedade, embora todos os menos complexos tenham). Seja e um elemento minimal. Ou ele é um elemento simples ou existem elementos menos complexos; o primeiro caso contradiz imediatamente a base (que todos os elementos simples possuem a propriedade) e o segundo caso, contradiz o passo indutivo, dado que tomamos um elemento minimal (assim todos os menos complexos que ele possuem a propriedade).

### Indução completa em fórmulas

No caso das demonstrações por indução em fórmulas também podemos pensar, como um análogo do principio de indução completa, o seguinte esquema inferencial:

1. Base da Indução: as fórmulas atômicas têm a propriedade P;
2. Passo Indutivo: Para qualquer fórmula A, se todas as fórmulas mais simples que A têm a propriedade P, então A também tem a propriedade P;

Conclusão: Todas as fórmulas têm P

Lançando mão do procedimento de demonstração assim esquematizado, a demonstração da base ficaria como dantes, e a do passo indutivo compreenderia, inicialmente, a instanciação da asserção, seguida de uma demonstração por casos, que contemplaria as várias estruturas morfológicas que a fórmula poderia ter. Ou seja, assumiriam a forma seguinte

Base da Indução:

A constante proposicional tem a propriedade P;

As fórmulas da forma Pt1, ..., tn, têm a propriedade P;

Passo Indutivo:

Seja A uma fórmula não atômica

Hipótese da indução: quaisquer fórmulas menos complexas que A têm P

Caso 1: A é da forma ¬B. [...] Então A tem P.

Caso 2: A é da forma B ∧ C). [...]Então A tem P.

Caso 3: A é da forma (B ∨ C). [...]Então A tem P.

Caso 4: A é da forma (B → C). [...]Então A tem P.

Caso 5: A é da forma ∀x B [...]Então A tem P.

Caso 6: A é da forma ∃x B [...]Então A tem P.

Tal como antes, os colchetes com reticências dentro indicam o raciocínio que, assumindo a hipótese da indução, permite concluir que a fórmula A tem a propriedade em pauta.

### Indução generalizada e números naturais.

Na caracterização acima das induções completas, deixamos na sombra uma dificuldade para o uso do esquema generalizado de indução, a saber, a noção de complexidade a que faz referência: como compreendê-la? Em que condições um elemento do domínio pode ser dito mais complexo que outra? À primeira vista, os próprios procedimentos de geração forneceriam diretamente as respostas adequadas para essas questões. Consideremos o caso dos números naturais. Nesse caso, a complexidade é determinada pela relação “menor que”, relação essa que pode ser facilmente caracterizada a partir do procedimento de geração do conjunto dos números naturais (isto é, da noção de sucessor)[[14]](#footnote-14). A generalização dessa noção de menor para qualquer domínio definido indutivamente é a noção de ancestral (imediato ou não)[[15]](#footnote-15), Todavia, isso nos levaria a uma caracterização muito restrita da complexidade; por exemplo, no caso das fórmulas de uma linguagem, apenas as sub-fórmulas de uma dada fórmula poderia ser ditas menores que elas, embora haja um sentido intuitivamente óbvio em que se pode comparar fórmulas, sem que uma delas seja sub-formula da outra; por exemplo, se A e B são fórmulas quaisquer, então parece se intuitivamente óbvio que a fórmula A ∧ B é mais simples que a fórmula A ∧ (B ∧ C).

Uma noção mais ampla de complexidade parece ser imprescindível; por exemplo, se quisermos demonstrar que, n uma estrutura completa (isto é, na qual todos os objetos do universo são nomeados, vale dizer, qualquer objeto do universo é denotado por algum termo fechado), uma seqüência qualquer satisfaz uma fórmula (eventualmente aberta) se e apenas se a seqüência satisfaz a sentença formada a partir da formula em pauta, substituindo-se todas as ocorrências livres de variáveis pelos nomes dos objetos que a seqüência associa à correspondente variável. Nesse caso, a hipótese de indução deve fazer referência não apenas as sub-fórmulas imediatas de uma dada fórmula, nem mesmo apenas a todas as sub-fórmulas, mas também à instâncias de sub-fórmulas (que não são propriamente sub-fórmulas da fórmula original).

Uma maneira de introduzir a noção de complexidade é comparar, em termos de complexidade, antes os processos de geração que os próprios objetos gerados e caracterizar um objeto do domínio como mais simples que outro (ou eventualmente como de igual complexidade) se o processo (ou, antes, o mais simples dos processos, visto que um objeto pode vir a ser gerado de diferentes maneiras) para gerar aquele for mais simples que o processo de geração do outro. Todavia, a noção de processo mais simples não parece bem definida (o que seria mais simples duas aplicações iteradas de uma regra muito simples, ou uma única aplicação de uma regra de geração extremamente complexa do ponto de vista intuitivo). Assim, parece não restar alternativa, salvo a introdução explícita de uma medida de complexidade, ou seja, associar a cada elemento do domínio um número natural que seria o grau de sua complexidade. Dessa maneira, todas as demonstrações por indução completa em um domínio distinto do domínio dos naturais se converteriam em demonstrações completas no domínio dos naturais.

Assim, por exemplo, nas considerações lógico-morfológicas, supondo determinada a medida de complexidade, os esquemas de demonstração por indução seriam os seguintes.

1. Para termos
2. Para fórmulas
3. Base da Indução (n=0): as fórmulas de grau zero têm a propriedade P;
4. Passo Indutivo: Para qualquer n, se todas as fórmulas de grau menor que n têm a propriedade P, então as fórmulas de grau n também têm P;

Conclusão: Para qualquer, todas as fórmulas de grau n têm P

1. Para derivações

Assim, como a todo objeto morfológico é associado um grau, segue-se que todos têm a propriedade em pauta. Vemos, pois, que essas demonstrações por indução completa tornam-se casos particulares da indução completa (ou por curso de valores) em números. Para perceber isso, basta considerar Q a propriedade numérica “ser o grau objetos morfológicos (termos, fórmulas ou derivações) que têm a propriedade P ” (dito de outro modo, Q é a propriedade expressa pela asserção de que os objetos de grau n têm a propriedade P), assim, os esquemas acima são instâncias do esquema de inferência da indução completa em números:

1. Zero tem a propriedade Q
2. Para qualquer n, vale que, se todos os menores que n têm a propriedade Q, então n têm a propriedade Q:

Logo, todos os números têm a propriedade Q;

A medida pode ser (mas não precisa ser) exatamente a de número de passos no processo mais curto de geração (de aplicações iteradas das regras). No caso das considerações morfológicas, se tomarmos como medida da complexidade de um objeto sintático o número (eventualmente o minimal) de passos necessários para gerá-lo, as medidas de indução serão: para termos e derivações: o comprimento (o número de ocorrências de símbolos, no caso dos termos, ou de fórmulas, no caso das derivações), e para as fórmulas, o número de ocorrências de símbolos lógicos. Deste modo, estaremos associando a cada objeto morfológico, um número natural. Mas pode ser interessante, em certas circunstâncias, considerar outras medidas de indução. Por exemplo, no Cálculo Proposicional, se quisermos mostrar que toda fórmula é equivalente a uma fórmula na qual a negação ocorre no máximo aplicada diretamente a uma letra sentencial, evidentemente a boa medida é a soma total do número de outros símbolos lógicos no escopo de negações.

Também as definições por indução anteriormente apresentadas podem ser transformadas em definições por indução em números naturais. Por exemplo, em vez de definir o imediatamente o conceito de fórmula, define-se inicialmente o conceito de fórmula de grau n, por indução completa (ou por curso de valores) em n, e, em seguida, definem-se as fórmulas como as entidades que são fórmulas de grau n para algum n. Outro exemplo, se considerarmos uma teoria axiomática de primeira ordem, os seus teoremas podem ser definidos pelas seguintes cláusulas:

1. Cláusula básica: Axiomas são teoremas
2. Clausulas indutivas:
   1. Se A for um teorema, então xA é um teorema
   2. Se A e A →B forem teoremas, então B é teorema.

Isso equivale a definir por indução, o conceito de ser um teorema, indução na qual a medida é o número de passos (aplicações de regras de inferência) em uma demonstração dele.

Vemos, portanto, que é possível retraçar os procedimentos lógicos (de definição ou de demonstração) aos correspondentes na teoria de números. Assim, há um sentido em que os procedimentos lógicos (definitórios e demonstrativos) recursivos são mais básicos quando se considera o domínio números naturais. Exatamente, porque a caracterização de número natural é o caso mais simples de definição indutiva de um domínio, aquele em que há apenas um objeto inicial, uma única operação de geração e essa é uma operação simples unária e que induz uma ordem total estrita. Assim, só há uma noção de complexidade que respeita o procedimento de geração. Nesse sentido, os números naturais são paradigmáticos, mas daí não se segue que a noção de número natural seja mais clara e distinta que, por exemplo, a noção de fórmula, de sorte que devamos empregar aquela para esclarecer essa. Enfim, não devemos nos desencaminhar por essa observação, e passar a crer que a indução em números naturais é mais clara e distinta que os procedimentos indutivos em outros domínios. Não se segue uma sorte de pitagorismo na ordem da inteligência, visto que seja a noção de número, como qualquer noção de domínio indutivo depende da noção básica de reiterar uma operação e essa noção nunca pode ser completamente explicitada e tornada, por assim dizer, clara e distinta.

O conceito de número natural, não é nem mais nem menos claro e distinto que nossa compreensão (intuitiva: obscura e indistinta) de reiteração. Pois, decorre do primeiro teorema de incompletude, demonstrado pelo jovem Gödel, que os números naturais não podem ser exaustivamente caracterizados por meio de um sistema formal estrito; exatamente porque não podemos nos assegurar, formalmente, que os objetos do universo de um modelo de uma teoria formal estrita é exatamente aqueles gerados a partir de um dado por reiteração da operação de sucessor. Por conseguinte, a noção de número é tão clara e distinta quanto for a nossa compreensão, tácita, da reiteração, e reiterar é algo que sabemos fazer (ou não, mas sempre um como que ponto cego da inteligência finita)[[16]](#footnote-16).

A redução dos procedimentos generalizados de indução completa à indução completa em números fornece apenas uma medida da complexidade, mas essa não é necessária para legitimar o procedimento, bastaria uma noção de mais ou menos complexa, sem que seja necessário delimitar esse mais ou menos (medir).

A Matemática fornece valiosos recursos para contar, medir, enfim, num sentido amplo, calcular. Mas querer substituir a inteligência, pela matematização é apenas criar uma ilusão de inteligibilidade infinita.

## Restos

Para aqueles que aderiram ao pitagorismo, observemos que as demonstrações por indução em um domínio definido indutivamente, se forem corretas, como nos casos anteriores, podem ser transformadas em demonstrações por indução em números, transformando-as em uma indução no número de passos necessários para gerar o objeto (o número de interações de regras de geração), o que permite associar a cada elemento do domínio um número natural, dito o grau do elemento. No caso dos domínios morfológicos Teremos assim determinado uma medida da indução, como se costuma dizer, uma medida que expressa em termos numéricos a noção de complexidade.

Mais formalmente. Observemos inicialmente que dado um domínio S definido indutivamente, podemos definir uma relação binária R em S por meio da cláusula:

∀ab em S (a R b se e somente se existem a1, a2, ... ,an e uma operação de geração σ, tal que σ(a1, a2, ... ,an) é b e a é um dos a1, a2, ... ,an)

Ou seja, R é, de um ponto de vista intuitivo, a relação “ser um gerador imediato”. A validade dos demonstração por indução esta condicionada apenas ao fato de que o domínio como um todo seja o fecho por tal relação do conjunto de objetos iniciais.

Não é necessário que a relação seja bem fundada à esquerda (ela pode ter loopings), basta que exista um caminho bem fundado. (acho eu)

1. G. K Chesterton justificou o dar a lume mais um obra, Ortodoxia, afirmando que fora provocado por certos críticos a expor suas crenças, visto antes ter publicado uma obra na qual denunciava os erros de outros (Heresia), e não era necessário muito para se sentir provocado a publicar uma obra. Quanto a mim, não é necessário muito para me sentir provocado, não a publicar, mas a escrever umas notas e divulgar entre algumas pessoas. Um debate com a Silvia, por ocasião de um seminário, foi o acicate para que retomasse algumas notas antigas sobre o tema e as reformulasse (incorporando algumas correções sugeridas pelas observações da referida professora, a quem não posse deixar de consignar meu agradecimento). [↑](#footnote-ref-1)
2. Fórmulas e termos, como vimos, são certos tipos de sequências de símbolos e demonstrações e deduções em sistemas axiomáticos, certos tipos de sequências de fórmulas e, nesse sentido, esses domínios são formados a partir do domínio dos símbolos. Dado isso, talvez seja exato dizer que se considera um único domínio de entidades, o dos símbolos. Mas não convém aqui nos emaranharmos nas disputas ditas filosóficas sobre os critérios de existência e de distinção (às vezes chamados de critérios de compromissos ontológicos: quando uma teoria esta comprometida com a existência de uma entidade ou gênero de entidades e em particular, com a distinção entre duas os mais entidades ou tipos de entidades). Para justificar a assertiva acima, basta observar que não podemos caracterizar a noção de seqüência de elementos de um domínio a partir apenas das noções que caracterizam esse domínio, ou seja, que aquela é logicamente (segundo a teoria lógica corrente) irredutível a essa. Para perceber essa irredutibilidade, basta atentar para um fato notório (que pode ser demonstrado de diferentes maneiras): a irredutibilidade do cálculo de predicados poliádico ao cálculo monádico, visto que relações podem ser caracterizadas como propriedades (predicados monádicos) de seqüências do domínio inicial. Ademais, é muito razoável crer que nesse contexto, como de resto em toda a matemática, não estamos falando propriamente de existentes, mas de “criações” humanas, posto nem serem arbitrárias, nem idiossincráticas, nem ídolos tribais, nem etc. e posto terem um sólido fundamento no real, não são propriamente reais (visto que cremos que atos de criaturas, sejam individualmente, seja coletivamente, não conferem a existência). [↑](#footnote-ref-2)
3. Esse é o caso em que, mesmo tendo na mente apenas os nomes das coisas, não seria possível guardar os nomes de todas as “coisas”. [↑](#footnote-ref-3)
4. Obviamente, nessa caracterização supomos previamente caracterizado um domínio infinito, qual seja, o dos números naturais (ou, alternativamente, dos números inteiros positivos). Um dos propósitos das observações que consignamos aqui, além daquele de esclarecer certos aspectos das definições e das demonstrações, é chamar a atenção, oferecendo alguns elementos de juízo favoráveis, para a tese de que a noção de reiteração (presente nas definições indutivas e por indução e, em particular, na noção de número natural) é uma noção irredutível (que não pode ser explicada propriamente em termos mais simples) e fundamental principalmente para lidar com o infinito; por assim dizer, parte (pequena, porquanto diz respeito apenas às empreitadas cognitivas pouco importantes, como as da ciência e das humanidades, enfim dos saberes humanos.) de equipamento de que fomos providos para enfrentar nossa jornada terrena, para lidar com os nossos negócios (lembrando uma expressão freqüente nas páginas do Um Ensaio de John Locke. O importante matemático do século XX, H. Poincaré já advertira Hilbert, quando este pretendida reduzir as noções matemáticas, à manipulações simbólicas, para a irredutibilidade da noção de reiteração. Há ainda um segundo propósito secundário (mais muito importante na motivação para escrever) que é alertar para a transformação da Matemática na sereia que encantou Platão e na esteira dele muitos (entre eles o pai da ciência moderna, Galileu); ou seja, de tomar a possibilidade de expressar em termos tidos como matematicamente perspícuos, como o padrão para avaliar propostas de inteligibilidade, saberes (como se a realidade fosse escrita em caracteres matemáticos), condenando ao limbo da obscuridade tudo que não se prestasse à expressão matemática. Enfim, esse texto deve ser lido juntamente com as obras de Chesterton (incluindo as narrativas das façanhas do Pe. Brown) que denunciavam os lógicos que não são lógicos (como Bernard Shaw). [↑](#footnote-ref-4)
5. Por exemplo, numa teoria inconsistente, podemos definir suas demonstrações explicitamente como o conjunto de todas as sequências finitas de fórmulas. A afirmação acima deve ser tomada com certa boa vontade, uma vez que nela se recorre a uma noção de contornos um tanto quanto vagos: o de propriedade simples. Mas se suprimirmos a noção de simplicidade envolvida aqui, a asserção seria falsa, uma vez que é possível oferecer uma definição explícita (no sentido técnico desse termo) para cada um dos domínios considerados acima. Por exemplo, o domínio dos termos de uma linguagem de primeira ordem pode ser definido, explicitamente, supondo determinado o vocabulário da linguagem, como o menor conjunto de expressões que contem todas as variáveis, todas as constantes e tal que, para qualquer símbolo funcional n-ário f da linguagem e quaisquer expressões u1... un , se elas pertencerem ao conjunto, então a expressão fu1...un também pertence. Tanto a boa vontade para compreender algo, quanto o engenho e arte para desenvolver dispositivos de operacionalização são talentos inestimáveis, mas cada um tem o seu lugar e momento. Aqui é o momento antes da boa vontade. [↑](#footnote-ref-5)
6. Ruim por ruim fiquemos com o ruim compartilhado, hehehehehehehehe [↑](#footnote-ref-6)
7. Consta que o primeiro emprego de definições recursivas seria em HÖLDER, 1890 [↑](#footnote-ref-7)
8. Usualmente, a cláusula externa é omitida, ficando implícita no contexto. Procedemos assim na definição de fórmulas e de termos. Ao longo deste curso, encontraremos diversos exemplos de definições indutivas, que farão com que o estudante se familiarize com este importante procedimento de definição, introduzido pela Lógica Contemporânea. [↑](#footnote-ref-8)
9. Na formulação agora dada, a cláusula externa está implícita na observação que os procedimentos geram todos os elementos. [↑](#footnote-ref-9)
10. Estas duas cláusulas aparecem, sob a forma de axiomas, nas axiomatizações hodiernas da Teoria dos Números, frequentemente denominadas Aritmética de Peano. Consta que a primeira tentativa bem sucedida de oferecer tal axiomatização encontra-se em GRASSMAN, Lehrbuch der Arithmetik, 1861 [↑](#footnote-ref-10)
11. Essa denominação é motivada pelo fato de que tal formulação aplica-se apenas aos casos de demonstração por indução quando se considera apenas ordinais finitos (isto é, os números naturais), que são ou o zero ou sucessores imediatos de algum outro, não podendo assim ser generalizada para o caso em que operamos com ordinais transfinitos (portanto, ordinais que, embora sejam diferentes de zero, não são sucessores imediatos de nenhum outro ordinal, mas o limite da serie infinita de ordinais). [↑](#footnote-ref-11)
12. Literalmente, Dedekind chamara a atenção para a diferença entre o teorema da demonstração por indução e o teorema da definição por indução, oferecendo exemplos de domínios onde valeria o primeiro, mas não o segundo (não estaria assegurada a existência da função) (op. cit., pp. 85-90) [↑](#footnote-ref-12)
13. A circularidade é claramente um vício de definição, pois se definições devem servir para esclarecer uma noção (conceito, predicado), a compreensão da noção a ser definida não pode ser pressuposta pela definição. A circularidade é uma característica dos dicionários, mas estes não visam esclarecer o conjunto dos lexemas, mas apenas um ou outro lexema, supondo que o usuário já conheça alguns, antes de abrir o dicionário. [↑](#footnote-ref-13)
14. Podemos dizer que um número natural é menor que outro se existe uma série de números, tal que o primeiro elemento da série é aquele dito ser menor e o último é aquele dito ser maior e tal que cada elemento da séria, com exceção do primeiro, é sucessor do elemento imediatamente após ele na série. [↑](#footnote-ref-14)
15. Um elemento será dito ser ancestral de outro se existir uma série de elementos, tal que o primeiro elemento da série é aquele dito ser ancestral e o último é aquele dito ser o descendente, tal que cada elemento da série, com exceção do último, é gerador (eventualmente junto com outros elementos que também ocorrem na série) de algum elemento subseqüente. Um elemento é dito um gerador de outro, se houver algum procedimento que, a partir dele (eventualmente com mais outros) gere esse outro. [↑](#footnote-ref-15)
16. Um das conseqüências interessantes dos teoremas de limitação (em particular, aqueles ditos de Godel) é enterrar definitivamente o sonho faustiano da completa explicitação, da perfeita clareza e distinção. Vide a epígrafe do texto. [↑](#footnote-ref-16)